

CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase

19 de outubro de 2018

Duração: 2h 30min



INSTRUÇÕES

1. Você recebeu este Caderno de Questões e o Caderno de Respostas. Confira se o seu número de identificação desta fase da OMIF é igual ao que consta no seu Caderno de Respostas.
2. O Caderno de Respostas possui 5 folhas, uma para cada questão da prova. Você pode utilizar a frente e o verso de cada folha para responder a cada questão, mas não destaque essas folhas.
3. É necessário justificar todas as suas respostas, apresentando a resolução e os raciocínios utilizados de maneira organizada.
4. A prova tem duração de 2 horas e 30 minutos e pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
5. Sobre a sua carteira, você pode deixar apenas lápis, borracha, caneta azul ou preta e régua, além de seu documento pessoal.
6. Durante a prova, é proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta ou aparelhos eletrônicos. **Desligue o celular.**
7. Quando terminar a prova, devolva o seu Caderno de Respostas para o aplicador. Você pode ficar com este Caderno de Questões.



QUESTÃO 1

Antônio deseja escrever um número estritamente positivo em cada um dos seis quadradinhos vazios do tabuleiro abaixo, de modo que o produto dos três números de qualquer linha, coluna ou diagonal seja sempre o mesmo.

	4	3
1		

a) (5 pontos) Qual é o número (a) que Antônio deve escrever no quadradinho destacado abaixo?

	4	3
1		
a		

b) (5 pontos) Qual é o número (b) que Antônio deve escrever no quadradinho destacado abaixo?

	4	3
1		
	b	

c) (10 pontos) Mostre como Antônio pode completar o tabuleiro, ou seja, determine os números restantes: c, d, e, f.

c	4	3
1	d	e
		f

QUESTÃO 2

Desde 1998, a Copa do Mundo de Futebol Masculino é disputada por 32 seleções nacionais. Na primeira fase, as seleções são divididas em 8 grupos, nos quais cada seleção joga exatamente uma vez contra cada uma das outras três do grupo. Dentro de cada grupo, as duas seleções com melhor pontuação, considerando também os critérios de desempate, avançam às fases seguintes. Em cada jogo, cada time recebe 3 pontos em caso de vitória, 1 ponto em caso de empate e 0 ponto em caso de derrota.

a) (10 pontos) Qual é a menor pontuação que uma seleção pode conquistar na primeira fase de forma que ainda seja possível avançar à fase seguinte? Justifique sua resposta mostrando como é possível avançar com esta pontuação e mostrando por que é impossível avançar com um ponto a menos.

b) (10 pontos) Qual é a pontuação mínima que garante que uma seleção vai avançar à fase seguinte independentemente das pontuações das outras seleções? Justifique sua resposta mostrando por que essa pontuação garante o avanço à próxima fase e por que um ponto a menos não garante o avanço.



QUESTÃO 3

A Comissão das Olimpíadas de Matemática dos Institutos Federais lançou um edital para escolher a identidade visual da OMIF que seria utilizada em provas e demais materiais impressos. A restrição para o candidato concorrer era que ele tivesse realizado a prova da primeira fase da OMIF 2018. Os estudantes das três melhores imagens seriam premiados com medalha e certificado no evento da 2ª fase.

Carlos, aluno participante da primeira fase da OMIF 2018, teve uma ideia. Ele ordenou as letras da palavra OMIF dentro de uma coroa circular de cor preta fixa, e colocou o pingo da letra I no centro das circunferências que compõem a coroa. Agora, Carlos quer colorir cada letra da palavra OMIF, inclusive o pingo da letra I, usando, para isso, uma das cores: verde, vermelho ou dourado. Observe que o pingo da letra I pode ser preenchido com uma cor diferente do corpo da letra I.

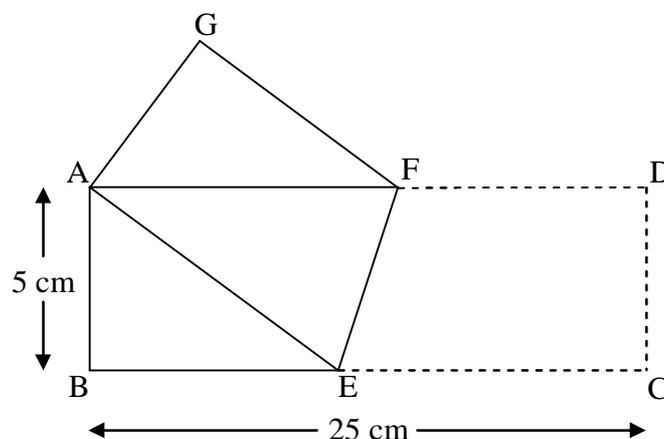
Todavia, antes de colorir, Carlos pretende fazer alguns cálculos a fim de organizar esse preenchimento. Quais resultados ele deverá encontrar ao responder as questões abaixo de forma correta?



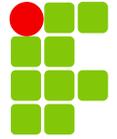
- (3 pontos)** De quantas maneiras distintas pode-se pintar o que se quer com as três cores mencionadas?
- (3 pontos)** De quantas formas distintas seria possível pintar o que se quer com as três cores mencionadas de maneira que o pingo da letra I tenha cor diferente do corpo da letra I?
- (6 pontos)** De quantas maneiras pode-se pintar o que se quer com as três cores mencionadas de modo que as letras O e M não possuam a mesma cor que o corpo da letra I e nem de seu pingo?
- (8 pontos)** Quantas são as formas de se pintar o que se quer de modo que as três cores mencionadas estejam presentes na imagem?

QUESTÃO 4

Uma folha retangular de papel ABCD de lados medindo 5 cm e 25 cm é dobrada fazendo-se coincidir os vértices A e C, formando um pentágono ABEFG, como ilustra a figura abaixo.



- (4 pontos)** Determine o comprimento do lado \overline{BE} deste pentágono.
- (8 pontos)** Determine o comprimento da dobra feita, \overline{EF} .
- (8 pontos)** Determine a área do pentágono ABEFG.

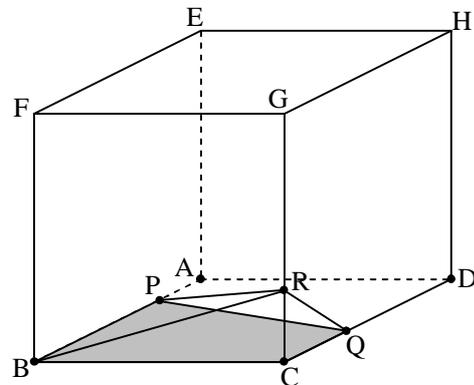
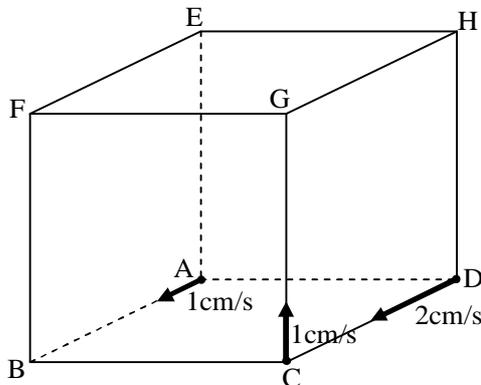


QUESTÃO 5

Três formigas andam sobre as arestas de um cubo $ABCDEFGH$ com lados de comprimentos iguais a 6 cm . Cada uma delas anda apenas sobre uma das arestas, de um vértice a outro, numa espécie de vai e volta, indefinidamente. No instante inicial:

- Uma formiga parte do ponto A em direção ao ponto B com uma velocidade de 1 cm/s e, ao chegar em B , volta para A , e assim sucessivamente, sempre nesta mesma velocidade. Após t segundos, essa formiga se encontra em um ponto P da aresta AB .
- Outra formiga parte do ponto D em direção ao ponto C com uma velocidade de 2 cm/s e, ao chegar em C , volta para D , e assim sucessivamente, sempre nesta mesma velocidade. Após t segundos, essa formiga se encontra em um ponto Q da aresta CD .
- Uma terceira formiga parte do ponto C em direção ao ponto G com uma velocidade de 1 cm/s e, ao chegar em G , volta para C , e assim sucessivamente, sempre nesta mesma velocidade. Após t segundos, essa formiga se encontra em um ponto R da aresta CG .

Indicamos por $A(t)$ a área de $PBCQ$ no instante t e por $V(t)$ o volume da pirâmide de base $PBCQ$ e vértice R no instante t .



a) (8 pontos) Escreva as expressões de $A(t)$ para $0 \leq t \leq 3$, $3 \leq t \leq 6$, $6 \leq t \leq 9$ e $9 \leq t \leq 12$.

Sugestão: Para facilitar a sua resposta dos próximos itens, deixe as expressões na forma fatorada.

b) (6 pontos) Escreva as expressões de $V(t)$ para $0 \leq t \leq 3$, $3 \leq t \leq 6$, $6 \leq t \leq 9$ e $9 \leq t \leq 12$, lembrando que o volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área de sua base pela sua altura.

c) (4 pontos) Utilize o plano cartesiano impresso na folha de respostas para esboçar o gráfico de $V(t)$ em função de t .

d) (2 pontos) Determine o maior volume que a pirâmide $PBCQR$ assume, dizendo também em que instante isso acontece.